

Mărimea Z se numește **impedanța ondulatorie a mediului** (sau **impedanța acustică** - pentru sunete). Relația (5.38) se numește **legea lui Ohm pentru acustică**. Ea permite stabilirea următoarei dependente între intensitate și presiune:

$$I = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \rho v = \frac{\omega^2 A^2 \rho^2 v^2}{2 \rho v} = \frac{P_{\max}^2}{2Z} = \frac{P_{ef}^2}{Z} \quad (5.39)$$

Pe baza acestei relații se determina intensitatea unei măsurând presiunea sa.

5.7. Unde electromagnetice

Cercetările privitoare la câmpurile electrice și magnetice au arătat că aceste câmpuri nu sunt independente. Maxwell a formulat o teorie unitară a fenomenelor electrice și magnetice, teorie cuprinsă în ecuațiile ce îi poartă numele, ecuațiile lui Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

E este intensitatea câmpului electric, B este inducția câmpului magnetic, ρ este densitatea de sarcină electrică, iar j este densitatea de curent de conducție. Ecuațiile lui Maxwell arată că un câmp electric variabil în timp produce în regiunea din spațiu pe care o ocupă un câmp magnetic ale cărui linii de câmp sunt curbe închise. În mod simetric, un câmp magnetic variabil în timp generează în spațiul pe care îl ocupă un câmp electric cu linii de câmp închise. Ansamblul celor două câmpuri formează câmpul electromagnetic. El este determinat în mod unic de ecuațiile lui Maxwell în orice moment și în orice punct din spațiu dacă sunt cunoscute

valorile lui E și B la momentul inițial. Sursele câmpului electromagnetic sunt sarcinile electrice ρ și curenții electrici j .

Dacă într-o porțiune din spațiu vid se crează un câmp electromagnetic acesta se propagă în restul spațiului cu o viteză finită $c=3 \cdot 10^8$ m/s sub formă de undă

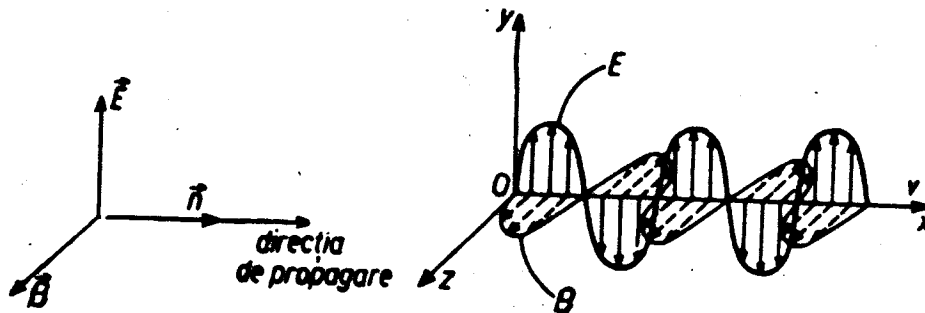


Fig.5.11.

electromagnetică. Atât vectorul E cât și vectorul B verifică ecuația generală a undelor (5.3) care este compatibilă cu ecuațiile lui Maxwell:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.41)$$

Viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid este $c=1/\epsilon_0\mu_0$, iar viteza de propagare într-un mediu oarecare v este:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \quad (5.42)$$

Raportul dintre c și v se numește indice de refracție al mediului: $n=c/v$.

Spre deosebire de undele mecanice care produc oscilații ale particulelor mediului, undele electromagnetice reprezintă oscilații în spațiu și în timp ale valorilor vectorilor electric și, respectiv, magnetic, așa cum arată

soluțiile ecuațiilor undelor electromagnetice:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx) \quad (5.43)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\omega t - kx)$$

Tabelul 5.2.

Domeniu			λ Hz	mod de producere
r a d i o	lungi	>1 km	>10 ⁵	circuite electronice
	medii	1 km - 100 m	10 ⁵ - 10 ⁶	
	scurte	100 m - 10 m	10 ⁶ - 10 ⁷	
	ultra- scurte	10 m - 1 m	10 ⁷ - 10 ⁸	
microunde		1 m - 1 mm	10 ⁹ - 10 ¹¹	circuite electronice
radiații infraroșii		1 mm - 10 ⁻⁶ m	10 ¹¹ - 10 ¹⁴	emise de corpuri
radiații vizibile		8.10 ⁻⁷ - 4.10 ⁻⁷ m	10 ¹⁴ - 10 ¹⁵	atomi excitați
radiații ultraviolet		4000 Å - 10 Å	10 ¹⁵ - 10 ¹⁶	atomi excitați
radiații X		10 Å - 0,1 Å	10 ¹⁶ - 10 ²¹	cicniri ele- ctron atom
radiații		< 0,1 Å	> 10 ²¹	nuclee atomice

Din ecuațiile lui Maxwell se deduce una din proprietățile fundamentale ale undelor electromagnetice, transversalitatea: oscilațiile câmpului electric și ale câmpului magnetic sunt perpendiculare pe direcția de propagare a undei și perpendiculare între ele. Dacă propagarea se face în direcția Ox, vectorul electric oscilează în direcția Oy, iar vectorul magnetic, în direcția Oz, Fig.5.11.

Interdependența dintre vectorii E și B este dată și de următoarea relație dedusă din ecuațiile lui Maxwell:

$$E = c \cdot B \quad \vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{c} \quad (5.44)$$

Cei doi vectori oscilează în concordanță de fază, deci își ating simultan valorile maxime și minime.

Domeniul de frecvențe, deci și de lungimi de undă al undelor electromagnetice este foarte vast. Clasificarea acestor unde se face, în principal, în funcție de modul de producere, așa cum arată Tabelul 5.2.

5.8. Energia undelor electromagnetice

Undele electromagnetice ca și undele elastice transportă energie. Energia undelor electromagnetice se evaluează cu ajutorul vectorului Poynting S definit prin:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$S = E \frac{B}{\mu_0} \sin \angle(\vec{E}, \vec{B}) = E \frac{B}{\mu_0} \quad (5.45)$$

$$[S] = [E] \frac{[B]}{[\mu_0]} = \frac{V A}{m m} = \frac{W}{m^2} = \frac{\text{energie}}{\text{timp} \cdot \text{suprafață}}$$

Din analiza dimensională rezultă că această marime reprezintă energia electromagnetică care trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafață. Vectorul S este perpendicular pe planul determinat de vectorii E și B și are sensul vitezei de propagare a undei, Fig.5.12.

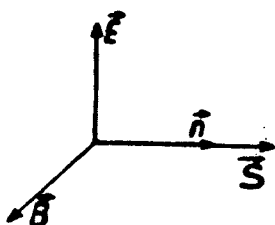


Fig.5.12.

Intensitatea unei electro-
magnetice este egală cu valoarea
medie a mărimii vectorului S ,
calculată cu expresiile lui E și B
din (5.43) și ținând cont că cei doi
vectori sunt perpendiculari pe
direcția Ox :

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{T} \int_0^T E \frac{B}{\mu_0} dt = \quad (5.46)$$

$$= \frac{1}{T \mu_0} \int_0^T E_0 B_0 \sin^2(\omega t - kx) dt = \frac{E_0 B_0}{2 \mu_0}$$

În concluzie, observăm că vectorul Poynting, ca și în cazul undelor elastice, exprimă mărimea, direcția și sensul de transmitere a energiei câmpului electromagnetic în unitatea de timp prin unitatea de suprafață. Pe lângă energie, undele electromagnetice transmit impuls și exercită presiune asupra suprafețelor cu care interacționează.

Exemple:

1. Să considerăm un conductor cilindric de lungime l parcurs de curentul I și să calculăm direcția și sensul vectorului Poynting precum și fluxul lui S . Din Fig.5.13. se observă că E este vertical în jos, B este tangent la linia de câmp, iar S este perpendicular pe

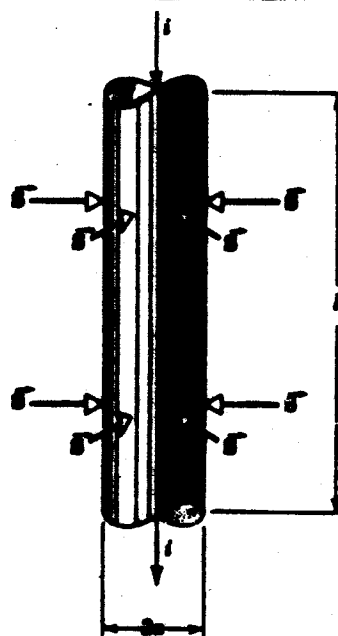


Fig.5.13.

cei doi și are sensul dat de regula burghiului, spre interiorul cilindrului (radial). Aceasta indică faptul că electronii din conductor primesc energie de la câmpul electromagnetic prin pereții conductorului și nu în lungul lui cum suntem tentați să credem. Fluxul lui S este integrala pe suprafața conductorului din produsul scalar dintre S și elementul de suprafață dA :

$$\begin{aligned}\Phi_S &= \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{A} = - \int_{\text{aria lat}} E \cdot \frac{B}{\mu_0} dA = - \int_{\text{aria lat}} \frac{U}{l} \cdot \frac{I}{2\pi r} dA = \\ &= - \frac{UI}{2\pi r} \cdot 2\pi r = -UI = -P_J = -\frac{\partial Q}{\partial t}\end{aligned}$$

Rezultatul de mai sus arată că energia pierdută de câmp prin fluxul vectorului Poynting este egală cu energia disipată prin efect Joule, deci, energia câmpului electromagnetic se conservă.

2. Lumina Soarelui ajunge cu intensitatea de $1,4 \cdot 10^3$ w/m² la limita superioară a atmosferei Pământului. Să calculăm amplitudinea vectorului electric și magnetic. Ne folosim de formulele (5.44) și (5.46):

$$\begin{aligned}I = \langle S \rangle &= E_0 \frac{B_0}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} \rightarrow E_0 = \sqrt{2c\mu_0 I} \approx 1000 \frac{V}{m} \\ B_0 &= \frac{E_0}{c} \approx 3,3 \cdot 10^{-6} T\end{aligned}$$

Comparativ cu valorile obișnuite, inducția câmpului magnetic este foarte mică în raport cu intensitatea câmpului electric. Este o posibilă explicație a faptului că ochiul uman este sensibil la vectorul electric și nu la cel magnetic.

5.9. Generarea undelor electromagnetice prin radiația purtătorilor de sarcină aflați în mișcare accelerată

În paragraful anterior am descris undele electromagnetice fără să specificăm modul în care se produc, adică fără să analizăm care sunt sursele undelor

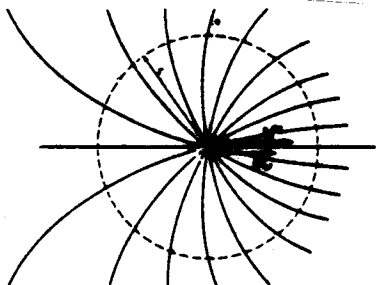


Fig.5.14.

electromagnetice. Dacă sursele undelor elastice sunt corpurile care vibreză, sursele undelor electromagnetice sunt aceleași cu ale câmpului electromagnetic, adică sarcinile electrice în mișcare.

O sarcină electrică ce se află în mișcare rectilinie uniformă nu radiază energie electromagnetică deoarece energia câmpului electromagnetic creat de sarcină este constantă indiferent de sistemul de referință inerțial. Există doar o scurgere de energie în direcția de deplasare a sarcinii. Când sarcina se află în mișcare uniform accelerată câmpul din "fața" sarcinii crește, iar cel din "spate" scade. Din cauza accelerației creșterea câmpului (corespunzător vitezei tot mai mari) este mai mare decât micșorarea câmpului produs anterior (corespunzător vitezei anterioare mai mici), Fig.5.14. Prin urmare, un exces net de energie trebuie transferat spațiului întreg pentru a produce câmpul. Deci, o sarcină electrică aflată în mișcare accelerată radiază energie electromagnetică.

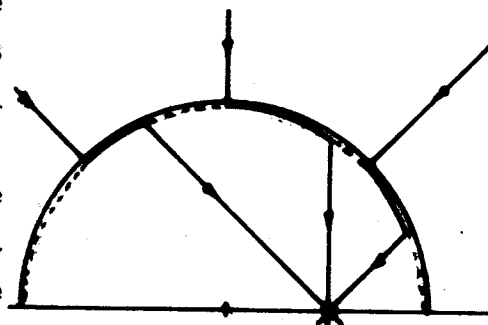


Fig.5.15.

În Fig.5.15. se observă configurația liniilor de câmp produse de o sarcină care la momentul $t=0$ a fost accelerată pentru scurt timp și apoi se mișcă cu viteza constantă. Când accelerația este continuă liniile de câmp sunt distorsionate ca în Fig.5.14.

Să presupunem că sarcina q se află în repaus în punctul P la momentul $t=0$, Fig.5.16. Ea este accelerată un timp foarte scurt τ pe direcția Ox până ajunge în P' , după

care se mișcă uniform cu viteza v .

Să analizăm starea câmpului electromagnetic când sarcina ajunge în punctul R după timpul t . Linia de câmp la momentul t este RABC cu următoarele semnificații:

- porțiunea RA corespunde poziției sarcinii la momentul $t > \tau$;
- porțiunea BC corespunde poziției sarcinii la momentul $t=0$;
- porțiunea AB corespunde perioadei de accelerare.

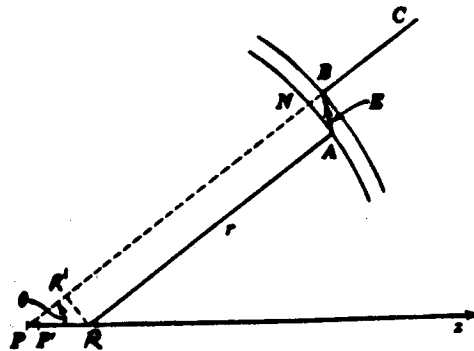


Fig.5.16.

Durata accelerării este foarte scurtă astfel că se fac următoarele aproximații:

$$PR \approx P'R = vt = at \quad (5.47)$$

$$r \approx r' \approx RA = ct$$

Distorsiunea cauzată de accelerație se propagă cu viteza luminii c și este cuprinsă în fișia de câmp de grosime ct . Din geometria figurii rezultă relațiile:

$$AN \approx RR' = PR \sin \theta = at \sin \theta; \quad BN = ct \quad (5.48)$$

Intensitatea câmpului electric este tangentă la linia de câmp având direcția liniei în cazul nostru. În porțiunea AB vectorul E se descompune în două componente, una normală E_n și una tangentială E_t între care există relația următoare dedusă din asemănarea triunghiului vectorilor E cu triunghiul ABN:

$$\frac{E_t}{E_n} = \frac{AN}{NB} = \frac{at \sin \theta}{ct} = \frac{at}{c} \sin \theta \quad (5.49)$$

Condiția de continuitate a câmpului electric pe direcția normală (radială) impune ca:

$$E_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (5.50)$$

Din relațiile (5.49) și (5.50) se află componenta tangențială a câmpului din zona de distorsiune datorată accelerării:

$$E_t = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{at}{c} \sin \theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{a}{c^2} \sin \theta \quad (5.51)$$

unde am folosit relația $r=ct$ din (5.47). Notând cu $a_t = a \cdot \sin \theta$ componenta accelerației pe direcția tangențială găsim:

$$E_t = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{a_t}{c^2} \quad (5.52)$$

Direcția lui E_t la distanța r este aceeași cu direcția accelerației tangențiale la momentul $t=0$ și are sens contrar ei, în general, corespunde direcției accelerației la un moment anterior $t'=t-r/c$. Definim componenta tangențială a câmpului electric ca un câmp suplimentar datorat accelerației numit câmp de radiație, astfel:

$$\begin{cases} \vec{E}_{rad}(r, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \vec{a}_t(t') \\ t' = t - \frac{r}{c} \end{cases} \quad (5.53)$$

Componenta normală este identică în "fața" și în "spatele" distorsiunii și de aceea ea nu poartă nici o informație, nu face parte dintr-o undă progresivă, nu reprezintă radiație. Un detector care ar detecta doar componenta normală a câmpului nu ar observa distorsiunea. De aceea numai componenta transversală a câmpului electric din

$$dP(r, t) = SdA = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} a^2(t') \sin^2 \theta \frac{dA}{4\pi r^2} \quad (5.55)$$

Puterea totală emisă în toate direcțiile, prin suprafața sferei de rază r se calculează integrând expresia de mai sus:

$$P(t) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} a^2(t') \int_{\Sigma} \sin^2 \theta \frac{dA}{4\pi r^2} \quad (5.56)$$

Pentru calculul integralei se trece la coordonate sferice și conform Fig.5.17. avem:

$$dA = a \cdot b = r d\theta \cdot r \sin\theta d\phi = r^2 d\theta \sin\theta d\phi;$$

$$\frac{dA}{r^2} = d\theta \sin\theta d\phi \quad (5.57)$$

$$\int_{\Sigma} \sin^2 \theta \frac{dA}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \sin^3 \theta d\theta d\phi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2}{3}$$

Puterea totală emisă devine:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2} a^2(t') \\ t' = t - \frac{r}{c} \end{array} \right. \quad (5.58)$$

Expresia (5.58) arată că puterea radiantă care traversează o sferă de rază r_1 la momentul t_1 are aceeași valoare pentru orice rază r_2 la momentul t_2 care corespunde aceluiași timp retardat t' . Aceasta înseamnă că energia câmpului electromagnetic se conservă și se propagă cu viteza luminii. Energia totală radiată în unitatea de timp este constantă pe o sferă a cărei rază crește cu viteza luminii.

Dacă sarcina punctiformă q execută o mișcare oscilatorie armonică de-a lungul unei axe Ox , radiația rezultată se numește radiație de dipol electric. Accelerația oscilatorului este $a(t') = -\omega_0^2 x(t')$, conform relației (4.3),

iar puterea medie radiată printr-o sferă de rază r va fi:

$$\bar{P} = \langle P(t') \rangle = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \langle a^2(t') \rangle = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \omega^4 \langle x^2(t') \rangle \quad (5.59)$$

Observații:

- Radiația electromagnetică emisă are frecvența egală cu cea a oscilației sarcinii electrice;

- Puterea radiației emise este direct proporțională cu puterea a patra a frecvenței. Undele cu frecvența mare (lungime de undă mică) transportă energie mare.

Exemplu:

Să calculăm puterea emisă de antena unei stații radio. O antena în formă simplificată este un fir de lungime l în care se menține un curent oscilant (paragraful 4.3.):

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} (q_0 \sin \omega t) = q_0 \omega \cos \omega t = I_0 \cos \omega t$$

$$q_0 = \frac{I_0}{\omega} \quad \langle x^2(t') \rangle = \frac{l^2}{2}$$

$$\bar{P} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \omega^4 \frac{l^2}{2} = \frac{I_0^2 \omega^2 l^2}{2 \cdot 6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{I_0^2}{2} \left(\frac{\omega^2 l^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \right) = \frac{I_0^2}{2} R = I_{ef}^2 R$$

unde R este rezistența de radiație a antenei. Pentru o antenă de lungime $l=30\text{m}$ care radiază unde electromagnetice cu frecvența $\nu=5 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ ($\lambda=c/\nu=600 \text{ m}$) și un curent cu valoarea maximă de 20 A se obține $R=1,97 \Omega$, iar puterea radiantă $P=400 \text{ W}$. În acest caz $l/\lambda=0,05 \ll 1$, deci ne încadrăm în aproximația ce a stat la baza deducerii formulei (5.53).

Teoria explicată în acest paragraf permite înțelegerea fenomenului de emisie a radiației electromagnetice de către atomi, de stațiile de radio sau de stele.